MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 4:

Supremum a infimum:

1. Ukažte, že pro neprázdné množiny A, B reálných čísel platí: $(\forall a \in A \ \forall b \in B : a \leq b) \Rightarrow (\sup A \leq \inf B)$.

2. Nechť podmnožiny A, B množiny reálných čísel jsou neprázdné a omezené. Co lze říci o supremu a infimu množin $A \cup B$ a $A \cap B$. „Vaše" tvrzení dokažte !

Limita posloupnosti:

1. Dokažte užitím definice limity posloupnosti (a důkaz podrobně napište) :
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin n = 0$;
   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a \in (0, \infty)$.

2. Dokažte, že platí (důkaz opět sepište podrobně) :
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$, a odtud
   $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ pro $q \in (-1,1)$ (lze užít (bylo na cvičení) : $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$ pro $q \in (1, \infty)$);
   b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n . b_n = 0$.
   (a odtud lze pak jednoduše určit např. limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin n$).